



三角関数の \sin と \cos は、角度 θ に対して単位円上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を定めます。このふたつの三角関数を使うと、円や楕円の方程式を導くことができます。

/// 円の方程式 ///

Math01-01「角度を座標にする三角関数 \sin と \cos 」で説明したとおり、角度 θ に対する単位円上の点 (x, y) を定めたのが、三角関数 \sin と \cos です。つまり、 $x = \cos\theta$ 、 $y = \sin\theta$ は単位円の円周を表します。したがって、半径 r の円の方程式は、[シンタックスMath01-007](#)のように定められます。

シンタックス Math01-007 三角関数 \sin と \cos による半径 r の円の方程式

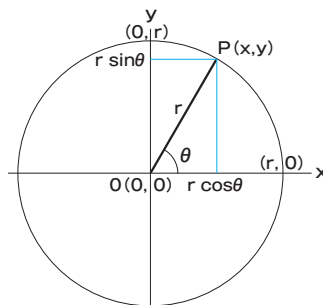
半径 r の円の方程式

原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 r の円周上の任意の点 $P(x, y)$ は、線分 OP と正の x 軸がなす角を θ とすると、つぎの方程式で表される。

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

円の中心を点 $C(a, b)$ にするには、 xy 座標に中心 C の座標値をそれぞれ加えればよい。したがって、点 C を中心とする半径 r の円の方程式は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}x &= a + r \cos \theta \\y &= b + r \sin \theta\end{aligned}$$



/// 楕円の方程式 ///

円を垂直方向もしくは水平方向に、拡大したり縮小すれば楕円になります。具体的には、円の方程式の xy 座標いずれかに、拡大・縮小比率としての係数を掛合わせます。それは、円の方程式で三角関数 \sin および \cos に乗じていた半径の値を、 xy 座標それぞれについて異なった値にするとということです。

原点 $O(0, 0)$ を中心として、 x 軸と $\pm a$ 、 y 軸とは $\pm b$ で交わる楕円の方程式は、[シンタックスMath01-008](#)のとおりです。これは原点 O が中心で半径 a の円の方程式をもとに、 y 座標に拡大・縮小比率 b/a を掛合わせたこととなります。

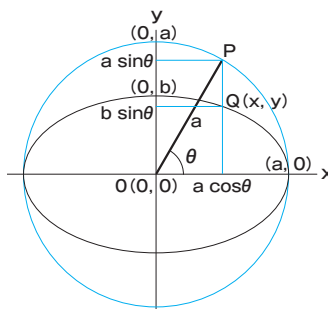
xy軸方向の半径がそれぞれaとbの楕円の方程式

原点O(0, 0) を中心としてx軸方向とy軸方向の半径がそれぞれa、bの楕円上の任意の点Q(x, y) は、角θに対してつぎの方程式で表される。

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \sin \theta \end{aligned}$$

楕円の中心を点C(c, d) にするには、xy座標にそれぞれ中心Cの座標値を加えればよい。したがって、点Cを中心とする楕円の方程式は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} x &= c + a \cos \theta \\ y &= d + b \sin \theta \end{aligned}$$



MANIAC! MATH // 01-003

媒介変数

xy軸の直交座標空間上の曲線は、多くの場合xとyの関数として示されます。原点O(0, 0) を中心とした半径rの円の方程式も、補助的な変数θを使わずに表せます。円周上の点(x, y) はすべて中心からの距離がrです。すると、三平方の定理から、つぎのような円の方程式が導かれます。

$$x^2 + y^2 = r^2$$

変数xyがともに2次になりますので、ひとつのxの値に対してyの値が最大ふたつ(円の上半分と下半分)得られます。また、この方程式で円周上等速でアニメーションする座標を求めることは難しいでしょう。本文のように変数θを加えることで、式は1次になって、扱いやすくなります。このような変数を「媒介変数」と呼びます。

一般に、曲線上の点(x, y) を方程式で表すとき、新たな変数tを用いて、xとyそれぞれを以下のようにtの関数fとgとして示せる場合があります。このときのtが、媒介変数です。

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

MANIAC! MATH // 01-004

楕円の方程式における角度θ

前掲シntax Math01-008の図に示した楕円の方程式における角度θは、中心となる原点Oと楕円上の点Qを結んだ線分OQではなく、変形する前の円の周上の点Pに対して延ばした線分OPとx軸とがなす角です。