#Math02-05

ベクトルの内積

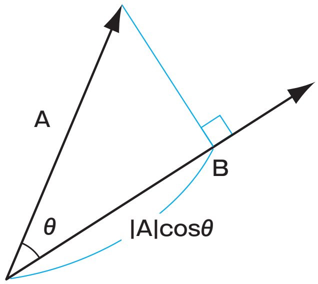
前述のとおり、ベクトル同士の乗算は定義されていません。しかし、掛け算に似た計算に「内積」があります。

/// 内積の幾何学的な定義とその役割 ///

ベクトルAとBの内積はA･Bで表され、AとBとのなす角をθとすると、以下の式で定義されます（図Math02-007）。ベクトルでは演算記号「･」は内積を示し、掛け算を意味しません。また、内積の値は実数つまりスカラーであって、ベクトルではないことにご注意ください。

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta$$

| 図 Math02-007 | ベクトルAとBの内積を表す



|A|cosθは、ベクトルAを
Bに射影した長さ。

ベクトルAとBの始点を結んで、ベクトルAの終点からBに垂線を下ろします。ベクトルBの始点から垂線との交点までの長さをAの射影といい、|A|cosθになります。この長さとベクトルBの長さ|B|の積が内積A･Bです。なお、ふたつのベクトルのなす角θは、小さい方の角度つまり0以上π（180度）以下の範囲で定められます。また、ベクトルAとBのどちらかひとつでも絶対値が 0（すべての成分が0）のとき、角度θは決められませんが、内積A･B = 0とします。

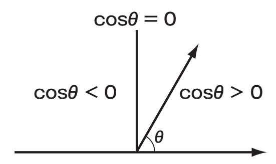
ふたつのベクトルAとBの絶対値がいずれも0でなければ、それらの絶対値の積|A||B|はつねに正になります。

$$|A||B| > 0 \quad (|A| \neq 0、|B| \neq 0のとき)$$

したがって、内積A･Bの値の正負は、cosθによって決まります。cosθは角θが0からπ（180度）までの範囲で、鋭角のとき正、直角であれば0、そして鈍角では負の値になります（再掲表06-003）。つまり、内積からふたつのベクトルの互いの向きがわかります。

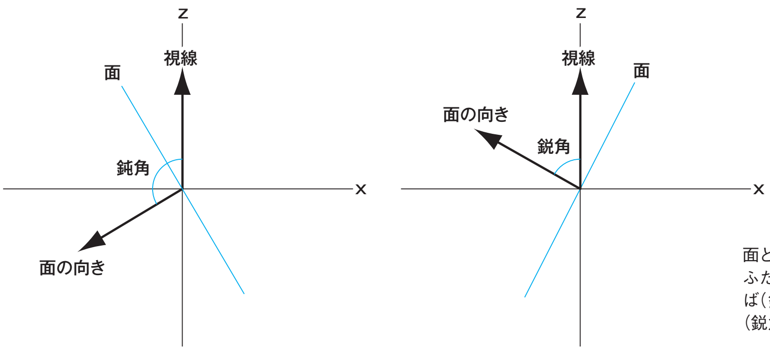
| 表 06-003 | ベクトルの内積となす角（再掲）

内積の値	なす角（θ）	$\cos\theta$
正	90度より小さい（鋭角）	正
0	90度（直角）	0
負	90度より大きい（鈍角）	負



たとえば、ひとつのベクトルを視線、もうひとつは面の向きとすると、ふたつの内積が負なら互いに向合って（鈍角）いるので、面は表が見えているということです（再掲図06-014左図）。逆に内積が正であれば、視線と面は同じ向き（鋭角）で、面は裏返っています（再掲図06-014右図）。内積が0のときは、互いに垂直ですので、面は真横を向いています。

| 図 06-014 | 視線と面のふたつの方向のベクトルから面の裏表を決める（再掲）



面と視線のベクトルのふたつが向合っていれば（鈍角）表、同じ方向（鋭角）であれば裏。

内積でベクトル同士の向きがわかる。