/// 内積の性質 ///

シンタックスMath02-004には、ベクトルの内積のおもな性質を掲げてました。まず、前述のとおり、内積の正負は$\cos\theta$の値で決まります。とくに、ふたつのベクトルAとBのなす角θが$\pi/2$(90度)つまり互いに直交するとき内積A・Bは0です。

つぎに、内積の定義A・B = |A||B|$\cos\theta$から明らかなように、ベクトルAとBの計算の順序を入替えても、その値は変わりません。つまり、内積は交換法則が成立ちます。

$$A \cdot B = B \cdot A$$

さらに、同じベクトルA同士の内積A・Aは、なす角が0です。したがって、cos0が1となり、内積A・Aは絶対値の2乗$|A|^2$に等しくなります。

$$A \cdot A = |A|^2$$

Action Script 3.0 for 3D GuideBook
CHAPTER_M2

#Math02-06 ベクトルの外積

ベクトル同士の掛け算に似た計算には、もうひとつ「外積」があります。「外積」は、ふたつのベクトルのどちらにも垂直なベクトルを求める演算です。ふたつのベクトルによりひとつの面が定まります。つまり、「外積」を用いると面の向きが決められるのです。

/// ベクトルの外積の定義と性質 ///

3次元空間のベクトルAとBの外積はA×Bで表され、AとBとのなす角をθとすると、シンタックスMath02-005のように定義されます。ベクトルでは演算記号「×」は外積を示し、掛け算を意味しません。また、内積がスカラーであったのに対して、外積はベクトルであることにご注意ください。

ふたつのベクトルAとBの外積A×Bは、第1にふたつのベクトルに互いに垂直なベクトルを導きます。したがって、当然3次元空間が前提となります(なお、Maniac! Math02-005参照)。

もっとも、ある面に垂直なベクトルといっても、表と裏のふたつの向きがありえます。そこで第2に、外積A×Bのベクトルの向きは、ふたつのベクトルAとBの互いの位置によって決めます。互いの始点を結んだベクトルAからBへの回転を考えたとき、同じように回した右ネジの進む先が外積A×Bのベクトルの方向です。

第3に、外積A×Bのベクトルの大きさつまり絶対値|A×B|を定めます。ふたつのベクトルAとBのなす角をθとすると、絶対値|A×B|はつぎの式のとおりです。

$$|A \times B| = |A||B|\sin\theta$$

この絶対値|A×B|の大きさは、ふたつのベクトルAとBを2辺とする平行四辺形の面積に等しくなります。|A|を平行四辺形の底辺とすると、|B|$\sin\theta$はその高さになるからです。

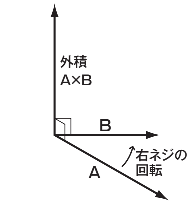
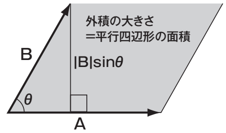
シンタックス Math02-005 ベクトルの外積とその性質

ベクトルの外積

3次元空間のベクトルAとBのなす角をθとするとき、ふたつのベクトルの外積はA×Bで表され、ふたつのベクトルにともに垂直で、ベクトルAからBへの回転で右ネジの進む向きのベクトルになる。そして、その絶対値（大きさ）|A×B|はつぎの式で定められる（再掲表06-002）。

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$$

| 表 06-002 | 外積で求められるベクトル（再掲）

外積の要素	求められた外積のベクトルとふたつのベクトルの関係	
角度	ふたつのベクトルAとBを含む平面に垂直。	
方向	ベクトルAからBに向かう回転を考えたとき、その回し方で右ネジの進む方向。	
大きさ	ベクトルAとBを平行四辺形の隣り合う2辺としたとき、ベクトルの外積の大きさ|A×B|はこの平行四辺形の面積|A||B|sinθと等しい。	

3次元空間のベクトルAとBの各成分がそれぞれ（a_x, a_y, a_z）および（b_x, b_y, b_z）である場合、外積A×Bはつぎの式で導かれる。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

ベクトルの平行条件

ベクトルAとBが平行のとき、ふたつのベクトルのなす角は0またはπ（180度）で、いずれもsinθ ＝ 0となる。したがって、外積の絶対値|A×B|は0なので、外積A×Bは絶対値が0となる、すべての成分が0のベクトル0（0, 0, 0）である。

A×B＝0　（|A×B|＝0より）

外積の性質

外積はその定義より、計算の順序を逆にすると方向が逆になる。つまり、交換法則は成立たない。また、同じベクトルの外積は、なす角が0なので、絶対値が0つまりすべての成分が0のベクトルになる。

A×B＝-B×A
A×A＝0　（|A×B|＝0より）

なお、ベクトル0はすべての成分が0のベクトルを表す。

MANIAC! MATH // 02-005

外積とクロス積

本来の「外積」（exterior product）は、数学の「テンソル」という分野で定義され、その次元はとくに限定されません。たとえば、2次元の外積は、つぎのようにスカラーになります。

A×B ＝ |A||B|sinθ　（ただし、AとBは2次元のベクトル）

3次元にかぎる場合には、用いられる演算記号「×」に由来する「クロス積」（cross product）と呼ぶ方が精確なようです（なお、Maniac! 06-004「外積と内積の別名」参照）。けれども、日本では3次元のクロス積の議論も「外積」と表記されることが多いので、本書もこの語法にしたがいます。より進んだ学習をする際や、英語の文献を参照するときには注意が必要です。