

つ以上いくつでも掛合わせるすることができます。前述の例で、 2×2 の正方行列AにベクトルXを掛合わせた結果はベクトルでした。ですから、この結果のベクトルには、 2×2 の正方行列もベクトルも乗じることはできません（掛ける順序を逆にして、この結果のベクトルを 2×2 の正方行列に掛合わせることは可能です）。けれどもたとえば、 2×2 の正方行列A、B、C、Dがあったとすれば、ABCDの掛け算の結果を求めて、さらに 2×2 の正方行列を乗算することができます。

M.6.4 変換行列

位置ベクトルに対して、その次元数と同じ行列数（つまり2次元なら 2×2 ）の正方行列を掛合わせると、原点を中心とした拡大・縮小や回転などの変換が行えます。まず、原点を中心とした拡大・縮小を、行列は使わずに考えてみます。位置ベクトル(x, y)の原点からの距離をn倍にするには、単純にスカラー値nを乗じて(nx, ny)とするだけです。水平方向にm倍、垂直方向にn倍であれば、位置ベクトルのx、y成分それぞれにスカラー値を掛合わせて、(mx, ny)とすればよいでしょう。

これを、わざわざあえて 2×2 の正方行列で行うとするなら、つぎのような行列を掛け算します。

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx \\ ny \end{bmatrix}$$

つぎに、原点を中心とした位置ベクトルの回転です。前節で、平面上の任意の成分(x, y)をもつベクトルは、スカラー倍した基本ベクトルの和で表せることを説明しました。

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

この基本ベクトル(1, 0)と(0, 1)を角度 θ で回転させれば、平面上の点はその変換に従属して θ 回転することになります。三角関数を使えば、変換した基本ベクトルは $(\cos \theta, \sin \theta)$ と $(-\sin \theta, \cos \theta)$ になります（図Math06-001）。

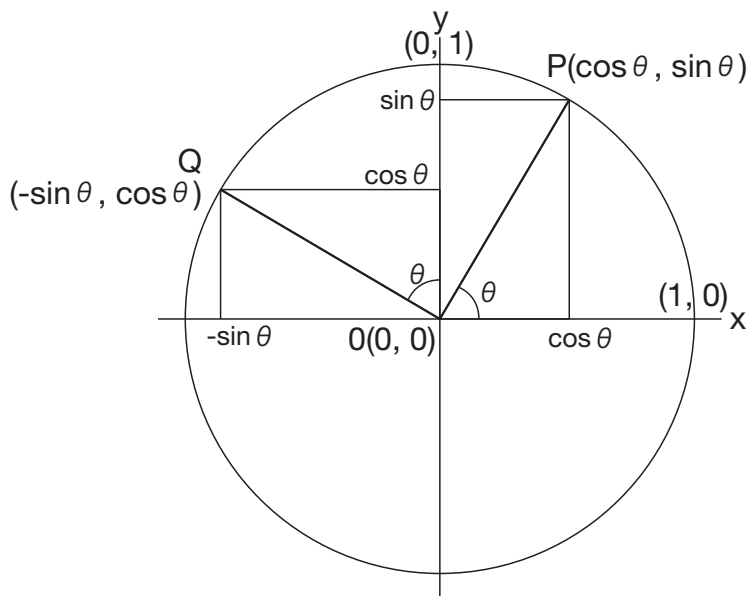


図 Math06-001 ■ 基本ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ を角度 θ 回転する
 変換した基本ベクトルは、それぞれ $(\cos \theta, \sin \theta)$ と $(-\sin \theta, \cos \theta)$ になる。

基本ベクトルを上述のように変換する回転行列は、以下のようなものです。基本ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ を掛合わせて、実際に結果を確かめてみてください。

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$



Maniac! Math06-002 ■ 回転行列を求める

回転行列の要素が本文のとおりになることを導くには、三角関数の加法定理を用います。加法定理はつぎのとおりです（証明は省きますので、興味のある人はネットで検索してみてください）。

$$\begin{aligned} \sin(a + \beta) &= \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta \\ \cos(a + \beta) &= \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta \end{aligned}$$

回転の変換を行う前の座標 (x, y) は、原点 $(0, 0)$ からの距離を r 、 x 軸と成す角度を a とすれば、つぎのように表されます（数学編 M.3 「三角関数」 のとくに図 Math03-004 参照）。

$$\begin{aligned} x &= r \cos a \\ y &= r \sin a \end{aligned}$$

原点を中心にこの座標が θ 回転されると、回転後の座標 (x', y') はつぎのとおりです。